Feuille de TD 1

Exercice [réciproque de Paley-Wiener]

- Montrez que si $f \in L^2[a,b]$ alors $\hat{f}(z) = \int_a^b f(t)e^{itz}dt$ est une fonction entière, qu'il existe C et A telles que $|\hat{f}(z)| \leqslant Ce^{A|z|}$ et que $\hat{f}|_{\mathbf{R}} \in L^2(\mathbf{R})$.
- Montrer que si $f \in L^2[0,+\infty[$ alors $\hat{f}(z) = \int_a^b f(t)e^{itz}dt$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}$ et $\{x \mapsto \hat{f}(x+iy); y > 0\}$ est une partie bornée dans $L^2(\mathbf{R})$.

Exercice [Formule de l'aire]

Soit f un biholomorphisme de $\mathbb{D}$ sur Ω un ouvert de $\mathbf{C}$ de développement de Taylor $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$.

1. Montrez que $\lambda(\Omega) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 d\lambda$ (λ est la mesure de Lebesgue).
2. En écrivant cette intégrale en coordonnées polaires, montrer $\lambda(\Omega) = \pi \sum_{n\geqslant 1} n|c_n|^2$.

Exercice [Résolution du $\bar{\partial}$ sur un compact]

Soit φ une fonction $\mathcal{C}^0$ sur K un compact de $\mathbf{C}$. On pose, pour $z \in \mathbf{C}$,

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int \frac{\varphi(\zeta)}{z-\zeta} d\lambda(\zeta)$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{C}$.

1. Montrez que cette fonction est bien définie, holomorphe hors du support de φ et nulle à l'infini.
2. Calculez f lorsque $\varphi \equiv 1$ et $K = \bar{D}(0,R)$ puis $K = \bar{C}(0,r,R)$.

On supposera maintenant que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{C}$ à support compact.

3. En dérivant sous le signe somme, montrez que pour R assez grand,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\pi}\int_{D(0,R)} \frac{(\partial\varphi/\partial\bar{z})(\zeta)}{z-\zeta} d\lambda(\zeta)$$

4. Concluez à l'aide de la formule de Cauchy généralisée que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \varphi.$$

Exercice [Représentation intégrale des hypergéométriques]

1. Soient $\mathbb{E} = \{z \mid \mathrm{Re} z > 0\}$ et pour $(z,w) \in \mathbb{E}^2$:

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt$$

   (a) Montrez que pour tout $w \in \mathbb{E}$, $z \mapsto B(z,w)$ est holomorphe sur $\mathbb{E}$ et de même pour $w \mapsto B(z,w)$ lorsqu'on fixe z.
   (b) Montrez que $B(z+1,w) = \frac{z}{z+w}B(z,w)$ et $B(1,w) = \frac{1}{w}$.
2. Pour a, b, c trois nombres complexes, $c \notin -\mathbf{N}$. on considère la série hypergéométrique :

$$F(a,b,c;z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)b(b+1)\ldots(b+n-1)}{c(c+1)\ldots(c+n-1)}\frac{z^n}{n!}$$

   (a) Montrez que le rayon de convergence de cette série est 1 sauf pour quelques valeurs de a et b que vous déterminerez.
   (b) Pour quelle valeurs de a,b, c et z l'intégrale suivante est-elle bien définie ?

$$I(a,b,c;z) = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt$$

   (c) Montrez que, lorsque tout est bien défini,

$$B(b,c-b)F(a,b,c;z) = I(a,b,c;z)$$